



Universidade Federal do ABC

**Estágios Finais da Evolução Estelar:
Estrelas Compactas e Buracos Negros**

Felipe de Lima Kelemen

Orientador: Profa. Dra. Cecilia B. M. H. Chirenti
Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC)

Santo André, 2014

Universidade Federal do ABC

**Estágios Finais da Evolução Estelar:
Estrelas Compactas e Buracos Negros**

Relatório final de iniciação científica
realizado com bolsa PIBIC (Capes/Cnpq).

Autor: Felipe de Lima Kelemen

Orientador: Profa. Dra. Cecilia B. M. H. Chirenti
Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC)

Santo André, 2014

RESUMO

O presente relatório apresenta o projeto de iniciação científica realizado na UFABC sob orientação da prof. Dra. Cecilia Chirenti, com bolsa PIBIC. O objetivo principal da pesquisa é o estudo das características relativísticas de objetos compactos como estrelas de nêutrons e buracos negros, bem como a introdução ao estudo de relatividade geral, e da estrutura do espaço-tempo que descreve um buraco negro. Inicia-se pela revisão e estudo de estrelas politrópicas relativísticas, seu colapso radial e indo até o estudo do espaço-tempo de Schwarzschild.

Palavras-Chave: *Relatividade, Astrofísica, Buracos Negros, Estrelas Politrópicas.*

ASTRACT

The report presented here shows the development that has been made in this research project at UFABC under the supervision of Prof. Dr. Cecilia Chirenti, with Capes/Cnpq's financial support. The main objective of this research is the study of the relativistic characteristics present in compact objects such as neutron stars and black holes, together with an introductory study of general relativity, and the spacetime structure that describes a black hole. It begins with a review of relativistic polytropic stars, their radial collapse and ends with the Schwarzschild spacetime metric.

Keywords: Relativity, Astrophysics, Black Holes, Polytropic Stars.

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO	6
2.DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS	6
3.CONCLUSÃO	16
4.REFERÊNCIAS	18
APÊNDICE A	19

1.INTRODUÇÃO

Buracos negros têm sido objeto de estudo de muitos físicos nos últimos anos, devido às tantas possibilidades que surgem com a aplicação da teoria da relatividade geral de Einstein a sistemas que envolvem estes objetos astrofísicos compactos, como, por exemplo, suas características internas, dando-nos um vasto campo de estudo com muitas descobertas a serem feitas.

Nos estágios finais da evolução de uma estrela mais massiva que o Sol, quando todo seu combustível se esgota, ela explode, num evento chamado supernova. O resultado disso pode dar origem uma estrela de nêutrons ou a um buraco negro, que são corpos celestes supermassivos e superdensos e objetos de estudo dessa pesquisa.

O estudo do comportamento interno de estrelas de nêutrons e das influências da sua presença num sistema binário de estrelas é o primeiro passo para o estudo da relatividade, que prevê a existência de buracos negros (objetos de maior foco na pesquisa), e permite a elaboração de teorias para as características de um buraco negro.

Os objetos da pesquisa são a introdução ao estudo da teoria da relatividade geral, com foco nas características astrofísicas mais importantes de um buraco negro, visando ao aprendizado da teoria da relatividade geral aplicada a objetos astrofísicos compactos. Para isso, foram utilizados programas computacionais baseados em modelos físicos e matemáticos escritos pelo próprio autor.

2.DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS

Definindo as coordenadas usuais (t,r,θ,ϕ) , o elemento de linha do espaço de Minkosvki pode ser escrito como:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1)$$

As equações para o equilíbrio hidrostático de Tolman-Oppenheimer-Volkoff com simetria esférica (TOV - dedução no Apêndice A)[2], descrevem a estrutura estelar:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r[r - 2m(r)]}. \quad (2)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2 . \quad (3)$$

$$(\rho + p)\frac{d\phi}{dr} = -\frac{dp}{dr} . \quad (4)$$

Sendo p a pressão, $m(r)$ a massa da estrela até o raio r ($r < R$, raio total da estrela), ρ a densidade total de energia e ϕ o potencial gravitacional. A equação de estado politrópica da forma $p = p(\rho)$, completa o sistema de equações, onde ρ é a densidade de energia bariônica:

$$p = \kappa\rho_b^\Gamma . \quad (5)$$

Com a equação de estado (5) e os valores centrais ($r = 0$) da densidade (ou pressão), massa (≈ 0) e potencial gravitacional (arbitrário) é possível escrever o sistema de quatro equações e quatro incógnitas, resolvendo-o computacionalmente utilizando o programa escrito em linguagem C++ com implementação do método numérico Runge-Kutta de 4ª ordem [3].

Uma boa aproximação é feita utilizando o valor da massa como sendo 0 para um raio ($r = \varepsilon$), apesar de não ser a realidade, estamos muito próximos do valor real se ε for muito pequeno. Uma aproximação melhor seria uma expansão em série de Taylor do resultado para valores de 0 até o valor ε tomado no programa ($r = \varepsilon = 0.001$ [MSol]).

Para fazer uma análise completa do comportamento de estrelas politrópicas foi rodado o mesmo programa dez mil vezes aumentando a cada vez o valor inicial da densidade central, e mantendo os outros parâmetros, para um mesmo valor de n e κ , e o resultado foi que se observa uma massa máxima permitida para as estrelas relativísticas (Figura 1), que depende da sua equação de estado e dos parâmetros centrais, principalmente da densidade central.

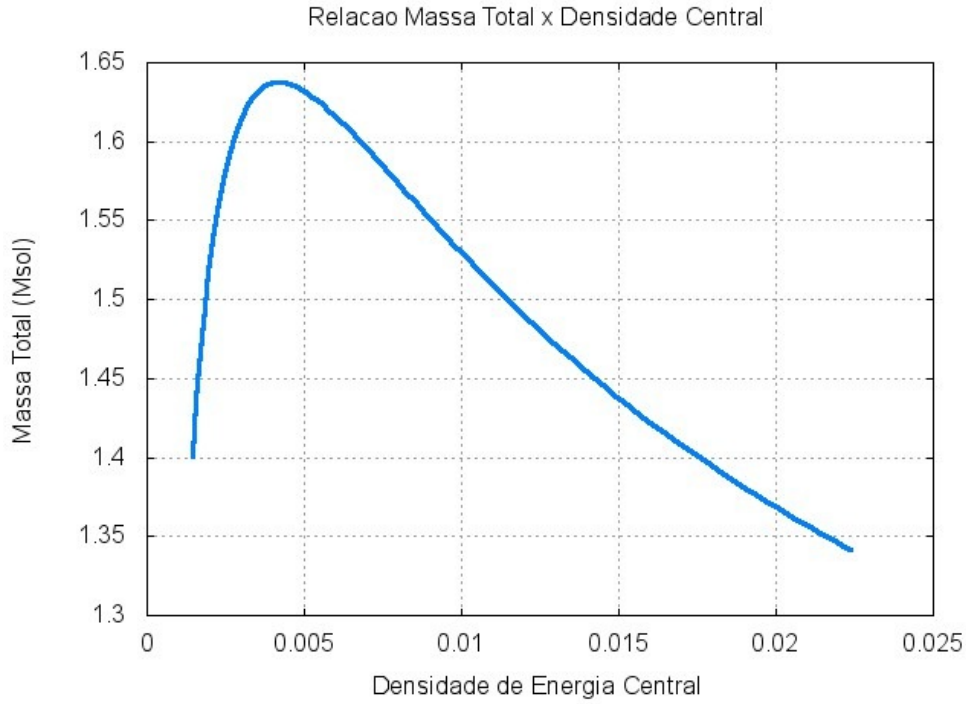


Figura 1: Relação entre a Massa Total e Densidade Central para $n = 1$ e $\kappa = 100$.

A região estável (na qual as estrelas que possuem este valor de massa total, raio total e densidade central, são estáveis) se encontra ao lado esquerdo do ponto máximo da curva na figura 1. E isso significa que as estrelas à direita são radialmente instáveis e portanto, qualquer perturbação pode levar ao seu colapso radial, e estas serão as estrelas interessantes para o estudo (fortes candidatas a se tornarem buracos negros) [4].

Na região externa à estrela, temos $\rho = p = 0$ (critério de parada do programa), e consequentemente:

$$\frac{dm}{dr} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{M}{r(r-2M)}. \tag{7}$$

Sendo, $-g_{00} = e^{2\phi} = 1 - \frac{2M}{r}$ e aplicando que o potencial tende a zero quando o raio tende ao infinito, podemos escrever a métrica exterior como:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{8}$$

A expressão (8) é a Métrica de Schwarzschild.

Uma visualização dessa métrica esfericamente simétrica pode ser feita assumindo um tempo t constante e observando no plano equatorial ($\theta = \pi/2$), assim o elemento de linha analisado será:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2. \quad (9)$$

Introduz-se uma dimensão auxiliar z , tal que:

$$dz^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + dr^2. \quad (10)$$

e então, temos, com simetria em ϕ :

$$z(r) = \int \sqrt{\frac{2M}{r-2M}} dr = 2\sqrt{2M} \sqrt{r-2M}. \quad (11)$$

Definido para valores de $r > 2M$.

Buraco negro de Schwarzschild

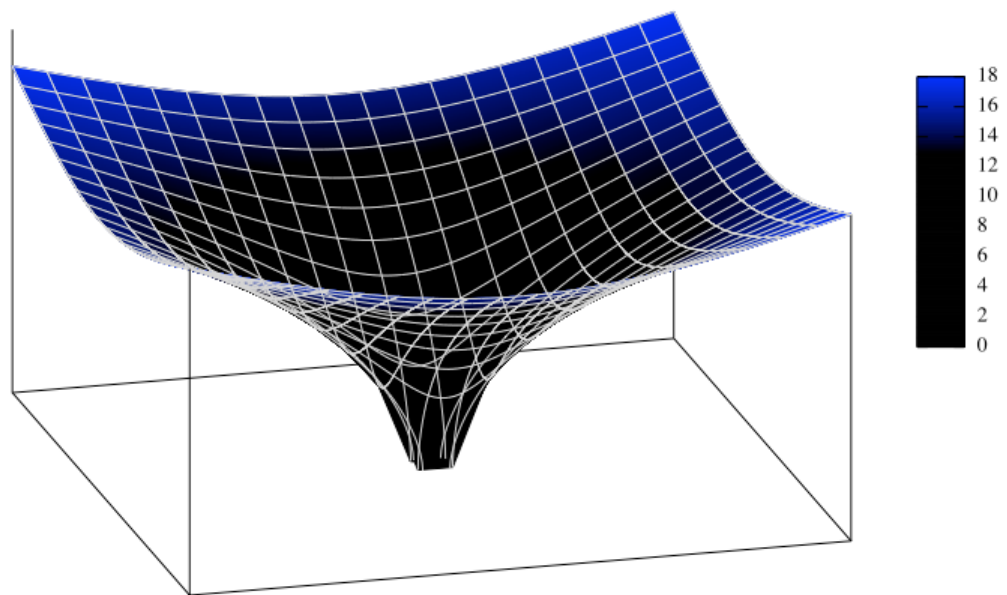


Figura 2: Visualização do espaço-tempo de Schwarzschild, $M = 1$.

Para valores muito grandes de r , o espaço-tempo de Schwarzschild tende ao de Minkosvki. E para os valores dados na Figura 2, o interior de $r < 2$ é um buraco negro de Schwarzschild.

Como dito anteriormente, um buraco negro pode surgir do colapso radial de uma estrela instável. O estudo foi feito analisando o modo de oscilação radial de uma estrela politrópica, pelo fato de ser o modo mais simples para ser analisado e busca encontrar instabilidades radiais geradas pelo deslocamento de um elemento de fluido situado num dado raio a partir do centro.

A equação de onda para a função de deslocamento renormalizada [5] é:

$$W \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(P \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) + Q \zeta . \quad (12)$$

Com os parâmetros $W(r)$, $P(r)$ e $Q(r)$ sendo:

$$W(r) = (\rho_0 + p_0) r^{-2} e^{3\Lambda_0 + \phi_0} \quad (12.a)$$

$$P(r) = \Gamma p_0 r^{-2} e^{\Lambda_0 + 3\phi_0} \quad (12.b)$$

$$Q(r) = e^{\Lambda_0 + 3\phi_0} \left[\frac{\rho_0'^2}{\rho_0 + p_0} r^{-2} - 4 p_0' r^{-3} - 8 \pi p_0 r^{-2} (\rho_0 + p_0) e^{2\Lambda_0} \right] \quad (12.c)$$

Para resolver o problema de autovalor da expressão 12, e obter a frequência de oscilação radial de todos os modos de oscilação,

admiti-se:

$$\zeta(t, r) = e^{i\omega t} \chi(r)$$

e então a equação diferencial ordinária se torna linear em $\chi(r)$ (parte radial):

$$\frac{d}{dr} \left(P \frac{d\chi}{dr} \right) + (Q + \omega^2 W) \chi = 0 \quad (13)$$

com o quadrado da frequência de oscilação como um autovalor da equação.

A fim de resolver o problema do autovalor numericamente, o problema foi dividido em um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem em χ e η .

$$\begin{cases} \frac{d\chi}{dr} = \frac{\eta}{P} \\ \frac{d\eta}{dr} = -(\omega^2 W + Q)\chi \end{cases} \quad (14)$$

Perto da origem temos:

$$\begin{aligned}\chi(r) &= \chi_0 r^3 + O(r^5) \\ \eta(r) &= \eta_0 + O(r^2)\end{aligned}$$

Então os valores iniciais para a integração são:

$$\chi_0 = \frac{\eta_0}{3P_0}, \quad (15)$$

com P_0 calculado a partir da expressão (12.b) e η_0 um valor arbitrário (aqui foi escolhido $\eta_0 = 1$)[6]. Para encontrar os autovalores que resolvem o sistema, é escolhido um valor arbitrário de ω e o sistema é integrado desde a origem ($r = 0$) até a superfície da estrela ($r = R$, assumindo que o raio é finito), onde a condição de contorno deve ser satisfeita. O deslocamento de um elemento de fluido nesse ponto deve ser finito para todo instante t , e portanto a perturbação Lagrangeana da pressão radial se anula para todo t (o que é necessário para a condição de junção do espaço-tempo esféricamente simétrico com o espaço de Schwarzschild) [7]. Se for satisfeita a condição de contorno, a frequência angular obtida é a desejada, e o modo de oscilação pode ser visto pelo número de raízes da função $\chi(r)$.

Numericamente, a condição de contorno nunca será exatamente igual a zero, portanto a cada iteração há uma interpolação linear entre o resultado obtido e o anterior, e verifica-se se ocorre uma mudança de sinal ou se a diferença entre eles pertence ao intervalo ($|\delta| < 10e-5$) que satisfaz a precisão desejada.

O problema de autovalor para o sistema da expressão (14) possui soluções para apenas um número finito de autovalores (ω^2). Para valores positivos de ω^2 , ω é real e a solução é puramente oscilatória (o que é esperado para estrelas estáveis radialmente). Todavia, se ω^2 for negativo, a frequência de oscilação é imaginária o que corresponde a um crescimento exponencial ou ao colapso até o núcleo, que corresponde à instabilidade com relação a oscilações radiais (estrelas instáveis) para o modelo estelar em consideração.

Para estrelas de nêutrons, acontece que para valores de densidade central (ρ_0) maiores que o valor da densidade de energia crítica ($\rho_{\text{crit}} = 0.041965$, onde a massa total da estrela é máxima [$M \approx 1.638 \text{ MSol}$, para $n = 1$ e $\kappa = 100$]) a estrela colapsa radialmente para um

buraco negro. E o modo neutro encontrado (correspondente ao autovalor $\omega^2 = 0$) ocorre exatamente para a densidade central igual a densidade crítica, como visto na Figura 3.

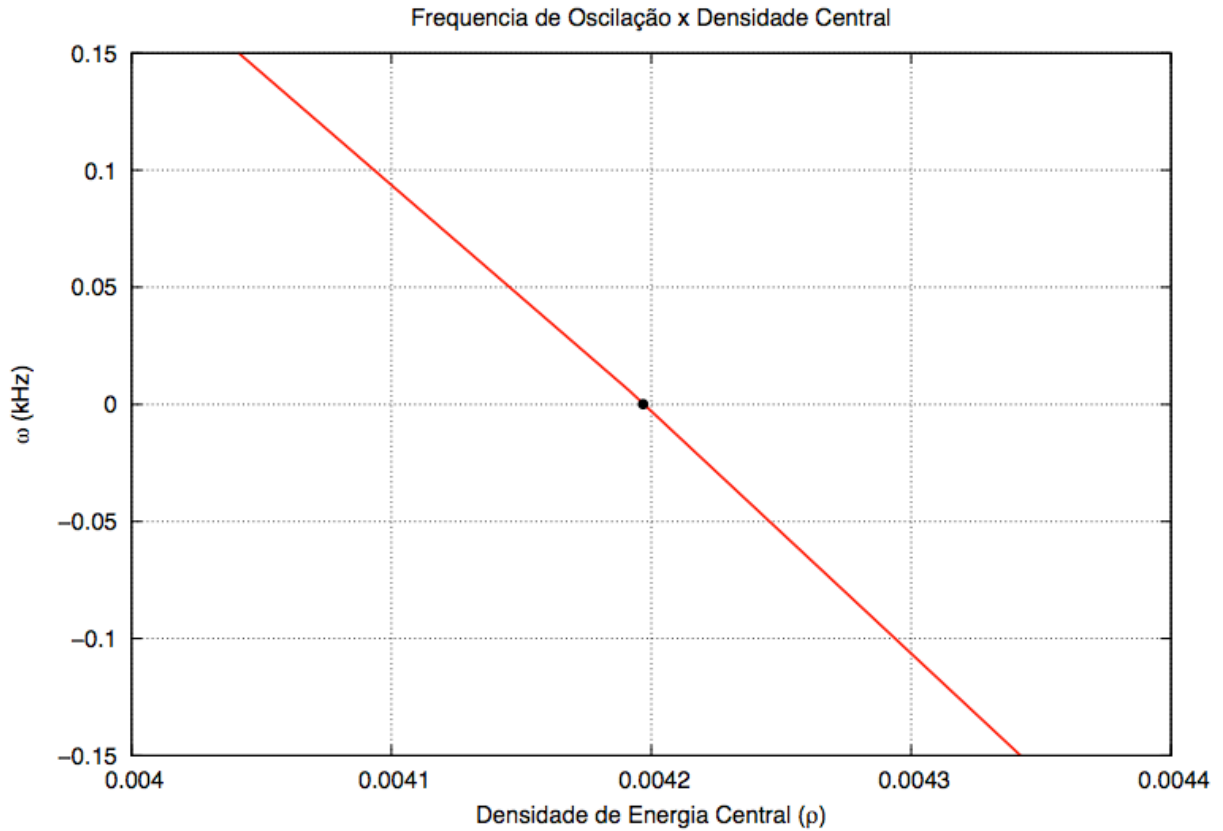


Figura 3: Frequência de oscilação para o primeiro modo excitado em função da densidade central.

Resolvendo o sistema (14) para a estrela politrópica com $n = 1$ e $\kappa = 100$ de densidade de energia bariônica central $\rho_{b0} = 0.00128$ (do ramo estável) foi obtido um valor de frequência de oscilação $F = 1.443$ kHz para o primeiro modo normal ($N = 0$).

A Figura 4 mostra a amplitude de oscilação para $N = 0$ da estrela resolvida, normalizada para uma porcentagem da amplitude total de oscilação na superfície. Os valores $\chi(r)$ são dados em quilômetros, e o valor da amplitude de oscilação é arbitrário pois o valor inicial de χ depende do valor inicial de η que foi adotado arbitrariamente como 1.

Podemos afirmar que este é o primeiro modo normal, uma vez que a curva gerada não possui outra raiz além da origem (0,0).

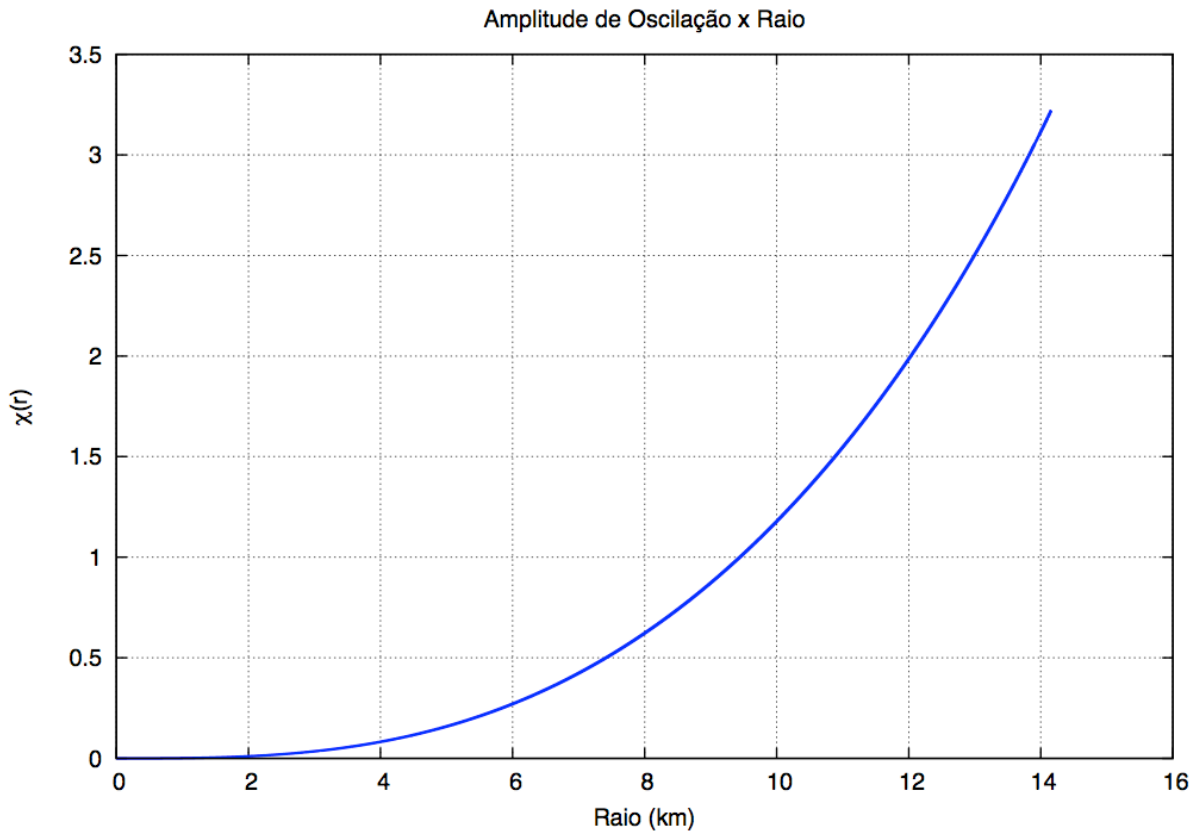


Figura 4: Amplitude de oscilação para o primeiro modo normal.

Para a mesma estrela obtêm-se a amplitude de oscilação na superfície em função do tempo através da expressão:

$$\zeta(t, R) = \frac{\chi(R)}{R^2} e^{\phi(R) + i\omega t} \quad (16)$$

Como o valor encontrado de ω^2 é positivo, a expressão (16) é puramente oscilatória em função do tempo. A Figura 5 exemplifica um período de oscilação na superfície da estrela, e os pontos marcados em vermelho mostram o tempo onde ocorrem as amplitudes máximas e mínimas de oscilação, respectivamente na crista e no vale da curva senoidal apresentada.

No caso analisado para estrelas do ramo instável, o valor encontrado de ω^2 é negativo, e portanto a expressão (16) toma forma exponencial real, mostrando que cada ponto dentro da estrela irá colapsar para o centro quando $t \rightarrow \infty$.

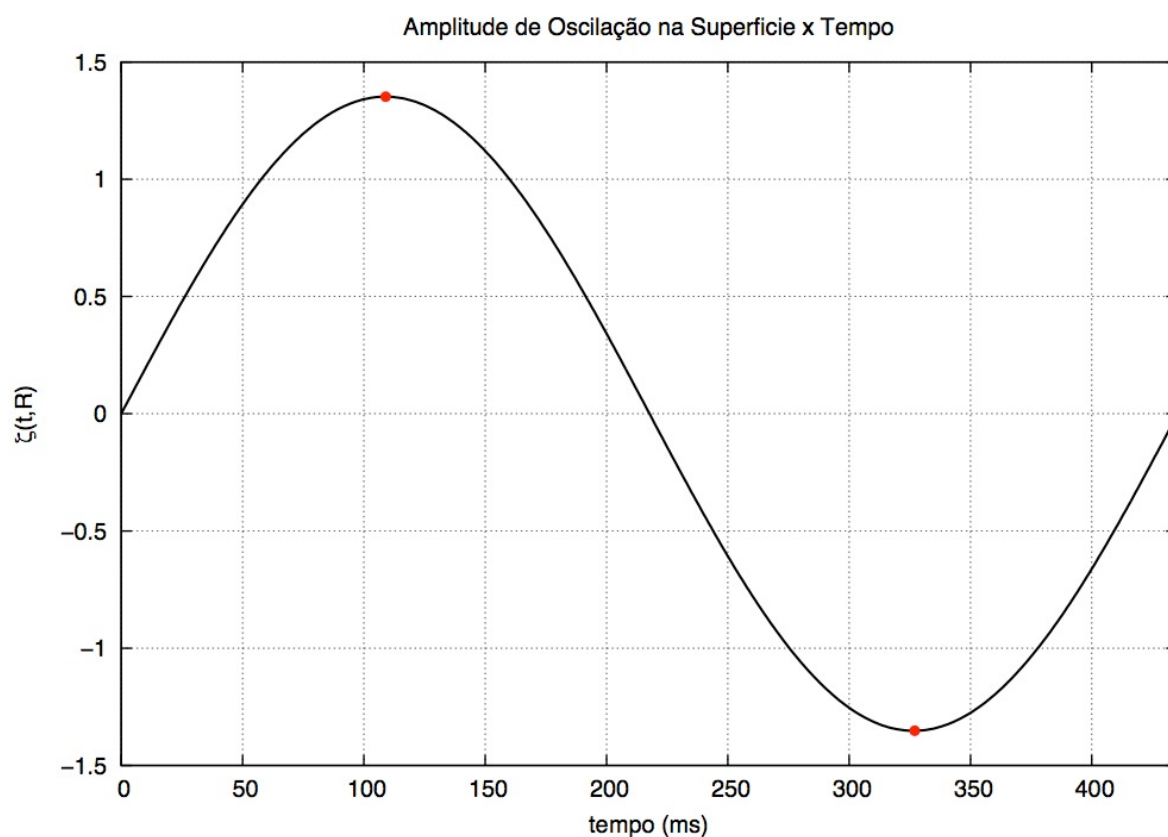


Figura 5: Amplitude de oscilação da superfície da estrela em função do tempo em um único período de oscilação no primeiro modo normal ($N = 0$).

Comparando os modos normais de oscilação para a estrela estudada, foi obtido um gráfico que compara a amplitude de oscilação de cada modo normal em função da posição dentro da estrela (Figura 6), as frequências de oscilação para cada modo normal, se encontram na Tabela 1:

Modo Normal (N)	F (kHz)
0	1,443
1	3,955
2	5,917
3	7,776
4	9591
5	11,380

Tabela 1: Frequência de oscilação para os respectivos modos normais.

Para cada curva, o número (N) de raízes nos da o N-ésimo modo normal excitado. E o valor da frequência de oscilação para maiores valores de N é significativamente maior do que

para $N = 0$ ($\approx 200\%$ a cada aumento de N). Isto é esperado, uma vez que para ter mais oscilações em menor tempo, é necessário um aumento na frequência de oscilação.

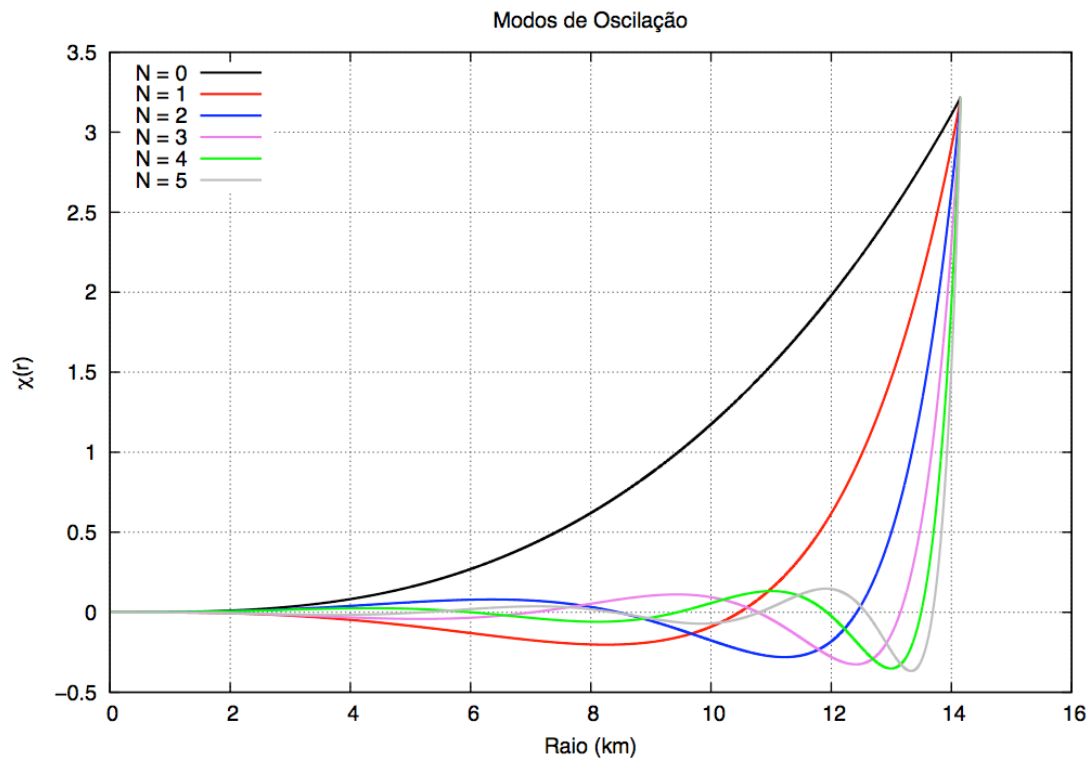


Figura 6: Primeiros modos normais de oscilação para a estrela politrópica estável estudada.

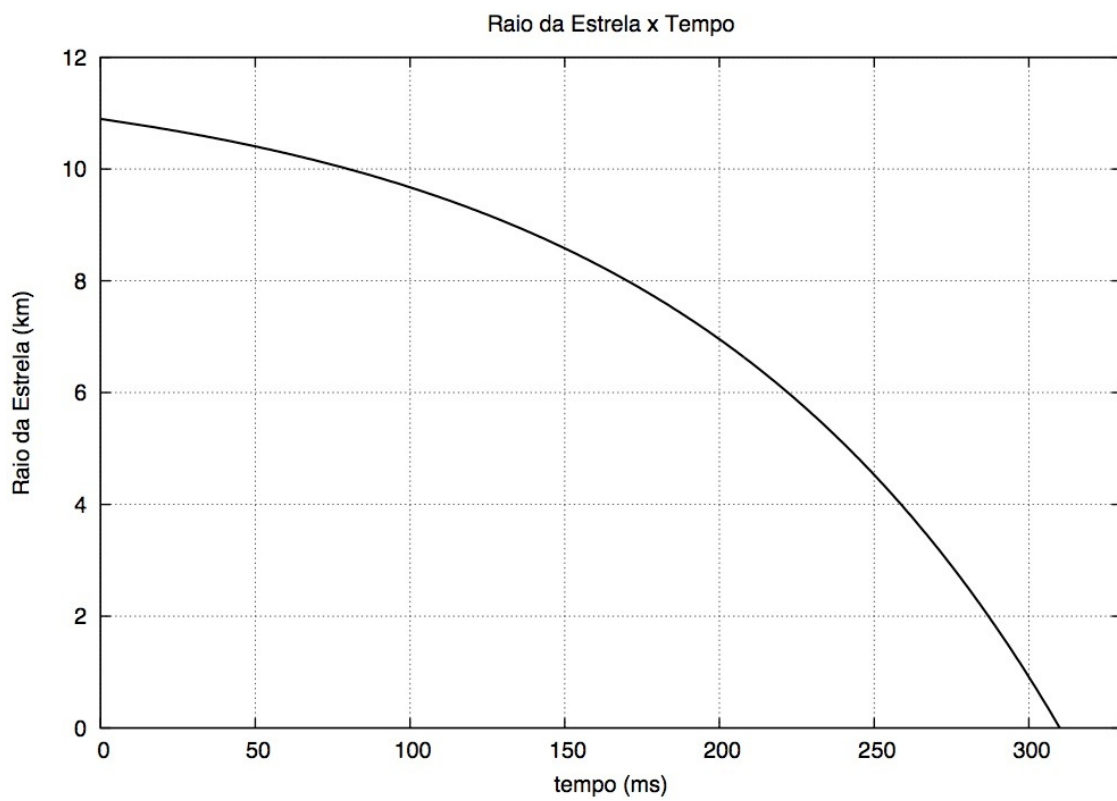


Figura 7: Raio da estrela instável em função do tempo devido à oscilação radial.

A mesma análise foi repetida para uma estrela instável. Como dito anteriormente, uma pequena perturbação levaria ao seu colapso radial, e é o que mostra a figura 7, para uma estrela de densidade de energia bariônica central $\rho_{b0} = 0.00358$ que resulta numa massa total $M = 1.63 \text{ MSol}$ e raio total $R = 10.8963 \text{ km}$, o tamanho da estrela vai diminuindo até que ocorre seu colapso radial ($R = 0$).

3.CONCLUSÃO

Para uma estrela politrópica relativística, os valores numéricos para massa e pressão em função do raio, obtidos pela integração do sistema de equações de TOV, nos dão um valor máximo possível para a massa total e raio total correspondente de uma estrela, para cada equação de estado. A condição de estabilidade radial em uma estrela é $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$. O fator de pressão das estrelas impede com que ocorra seu colapso, estrelas muito compactas (densas) possuiriam um deficit de pressão para suprir sua contração gravitacional, portanto as estrelas à direita do ponto máximo permitido não são estáveis e uma pequena perturbação no seu equilíbrio levaria ao seu colapso, formando um buraco negro.

Com o estudo de estrelas pulsantes, é possível verificar sua evolução e os efeitos de perturbações no equilíbrio a partir de métodos numéricos integrando as equações dinâmicas com as condições de fronteira e as equações de condições iniciais (Conservação Bariônica, Adiabaticidade, Conservação de Energia, e Equação de Campo de Einstein).

Resolvendo o problema do autovalor para a estrela politrópica escolhida ($\rho_{b0} = 0.00128$, $n = 1$ e $\kappa = 100$) foi obtido um valor positivo para o autovalor (ω^2) como era esperado, pois a estrela se encontra no ramo estável da curva da Figura 1. Com estes dados foi possível uma visualização da amplitude de oscilação na superfície em função do tempo, em função do raio, e uma comparação dos modos normais de oscilação para a mesma estrela radialmente estável.

A análise feita com o aumento da densidade de energia central, mantendo os parâmetros n e κ , mostra que o quadrado da frequência de oscilação varia linearmente em

função da densidade de energia central, com inclinação negativa, passando pelo 0 (modo neutro) no ponto de massa máxima permitida para estes parâmetros avaliados. Sendo que estrelas estáveis possuem valores de ω^2 positivos, e as radialmente instáveis valores negativos, o que implica no colapso radial dessas estrelas, que pode ser concluído a partir da forma exponencial real do vetor deslocamento para cada ponto dentro da estrela.

4.REFERÊNCIAS

- [1] B. Schutz, **First Course in General Relativity**, Second Edition, Cambridge (2009).
- [2] B. Schutz, **Gravity from the ground up: An introductory guide to gravity and general relativity**, Cambridge University Press, Cambridge (2007).
- [3] Press, W. H. , Teukolsky, S. A. , Vetterling W. T. , Flannery B. P. , **Numerical Recipes in C: The Art Of Scientific Computing**, Second Edition, Volume 1, Cambridge, 1992.
- [4] J. B. Hartle, **Gravity**, Addison Wesley, New York (2003).
- [5] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, **Gravitation**, W. H. FREEMAN AND COMPANY, San Francisco (1993).
- [6] J. O. Ruoff, **The Numerical Evolution of Neutron Stars Oscillations**, Dissertation, Fakultät für Physik der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen, Sindelfingen, Deutschland (2000).
- [7] D. Horvat, S. Ilijic, A. Marunovic, **Radial pulsations and stability of anisotropic stars with quasi-local equation of state**, Department of Physics, University of Zagreb, Croatia.

APÊNDICE A

Dedução das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff.

A partir da métrica de Schwarzschild estática e esfericamente simétrica, temos:

$$\begin{aligned} g_{00} &= -e^{2\phi(r)} & g_{\theta\theta} &= r^2 \\ g_{rr} &= e^{2\Lambda(r)} & g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (1)$$

Os componentes do tensor de Einstein são obtidos pela expressão:

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R. \quad (2)$$

Com o escalar de curvatura (R), dado por:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (3)$$

Calcula-se as componentes do Tensor de Riemann a partir da definição:

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \triangleq \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}. \quad (4)$$

Sendo que os símbolos de Christoffel são definidos em função das componentes de métrica, dado pela expressão:

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\nu\alpha,\beta} + g_{\nu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (5)$$

Com todos os símbolos de Christoffel calculados (devido à simetria da métrica, muitos são iguais a zero), podemos usar os resultados na expressão (4) para calcular as componentes do Tensor de Riemann, em seguida calcular as componentes do Tensor de Ricci, o escalar de curvatura (expressão 3), e por fim, as componentes do Tensor de Einstein (2).

Portanto, o Tensor de Einstein possui as seguintes componentes para a dada métrica:

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2\phi} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\Lambda})], \quad (6.1)$$

$$G_{rr} = -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \phi', \quad (6.2)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\Lambda} [\phi'' + (\phi')^2 + \phi' / r - \phi' \Lambda' - \Lambda' / r], \quad (6.3)$$

$$G_{\phi\phi} = G_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (6.4)$$

Temos que o Tensor de Einstein pode ser relacionado com o Tensor Energia-Momento, através da expressão:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} . \quad (7)$$

E calculamos as componentes do Tensor Energia-Momento com a expressão:

$$T_{\alpha\beta} = (p + \rho)U_{\alpha}U_{\beta} + pg_{\alpha\beta} . \quad (8)$$

Sendo U a quadrivelocidade de um fluido perfeito, dado por $U_0 = -e^{\phi}$ e as outras componentes nulas. Temos então as componentes do Tensor Energia-Momento:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho e^{2\phi} \\ T_{rr} &= pe^{2\Lambda} \\ T_{\theta\theta} &= pr^2 \\ T_{\theta\theta} &= pr^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (9)$$

Com estes resultados, aplicando a conservação de energia:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 . \quad (10)$$

Temos,

$$T^{r\beta}{}_{;\beta} = T^{r\beta}{}_{,\beta} + T^{\delta\beta}\Gamma^r{}_{\delta\beta} + T^{r\delta}\Gamma^{\beta}{}_{\delta\beta} = 0 . \quad (11)$$

Daí obtemos as componentes não nulas:

$$T^{rr}{}_{,r} + T^{00}\Gamma^r{}_{00} + T^{rr}\Gamma^r{}_{rr} + T^{\theta\theta}\Gamma^r{}_{\theta\theta} + T^{\phi\phi}\Gamma^r{}_{\phi\phi} + T^{rr}\Gamma^{\beta}{}_{r\beta} = 0 . \quad (12)$$

De onde sai que,

$$(\rho + p)\frac{d\phi}{dr} = -\frac{dp}{dr} . \quad (13)$$

Da expressão (7), obtemos:

$$G_{00} = 8\pi T_{00} \quad (14.1)$$

Então:
$$\frac{d}{dr}[r(1 - e^{2\Lambda})] = 8\pi r^2 \rho . \quad (14.2)$$

E como, por definição, $e^{2\Lambda} \triangleq \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}$ obtemos:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho . \quad (15)$$

A expressão (15) é a primeira equação do sistema de TOV para descrever a estrutura estelar, que relaciona a derivada da massa em relação ao raio.

Em seguida, também da expressão (7), sai que:

$$G_{rr} = 8\pi T_{rr} . \quad (16.1)$$

$$E \quad -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2\phi'}{r} = 8\pi p e^{2\Lambda} . \quad (16.2)$$

Manipulando a expressão (16.2), é fácil obter:

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi pr^3}{r[r - 2m(r)]} . \quad (16.3)$$

Utilizando a expressão (13), aplicada à (16.3), tiramos:

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{m(r) + 4\pi pr^3}{r[r - 2m(r)]} . \quad (17)$$

A expressão (17) é a segunda equação do sistema de TOV que relaciona a derivada da pressão em relação ao raio.

Finalmente, o sistema pode ser escrito pelas expressões (13), (15) e (17), junto da equação de estado convenientemente escolhida, $p = p(\rho)$. Obtemos então o sistema de equações de TOV para descrever a estrutura estelar (18), considerando fluido perfeito e a métrica esfericamente simétrica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dm}{dr} = 4\pi \rho r^2 \\ \frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{m(r) + 4\pi pr^3}{r[r - 2m(r)]} \\ \frac{d\phi}{dr} = -\frac{1}{(\rho + p)} \frac{dp}{dr} \\ p = p(\rho) \end{array} \right. \quad (18)$$